

Ing. Efraín Friedmann

Analogía eléctrica del enrejado hiperestático de nudos articulados

1. El enrejado hiperestático de nudos articulados es una estructura formada por barras rectas unidas entre sí mediante rótulas.

El estudio de un enrejado hiperestático con ligazones externas o internas superabundantes se hacía hasta ahora mediante el método de las Fuerzas o hablando en forma general, con el auxilio del Teorema de Energía Mínima de Castigliano.

Brevemente, el método consiste en reducir la estructura hiperestática a una isostática fundamental, eliminando las restricciones superfluas desde el punto de vista estático, y agregando nuevas fuerzas exteriores de valor desconocido en vez de las ligazones suprimidas.

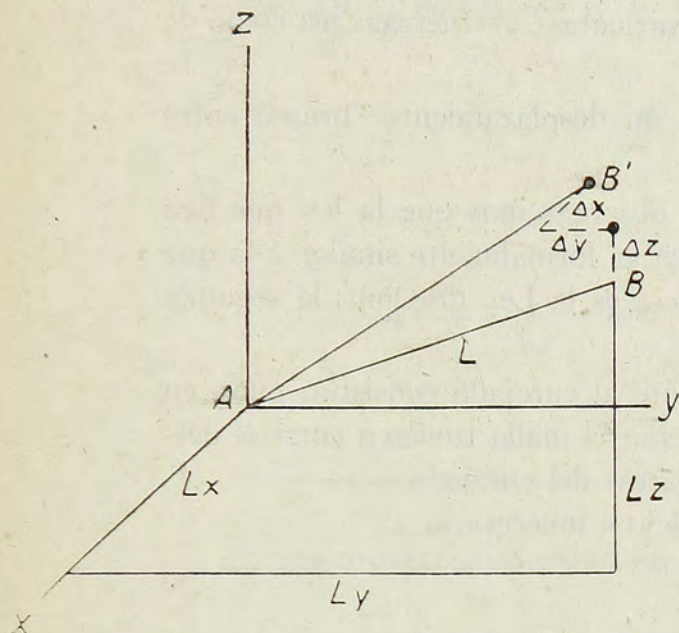
Si se escribe la expresión de la energía interna de esa estructura, y se establece que esa energía es un mínimo se obtiene el número necesario de ecuaciones para encontrar el valor de los esfuerzos desconocidos.

La resolución práctica del problema es laboriosa y tiene el inconveniente de que es difícil comprobar los resultados finales, pues no basta que estos cumplan con las leyes de la estática, sino que además deben verificar las condiciones de continuidad.

Otra forma recientemente desarrollada para calcular enrejados hiperestáticos, consiste en la resolución de un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son los desplazamientos de los nudos del enrejado (Método de Southwell).

En efecto, si se adoptan como incógnitas estos desplazamientos, es posible expresar los esfuerzos longitudinales de las barras del enrejado en función de ellos, y escribir en seguida, para cada nudo, las ecuaciones de equilibrio de la estática. Si el enrejado es plano, cada nudo puede tener dos desplazamientos y da origen a 2 ecuaciones de equilibrio; si es espacial cada nudo puede tener 3 desplazamientos pero da origen a 3 ecuaciones de equilibrio. En cada caso el sistema de ecuaciones tiene una solución única y bien determinada.

Las ecuaciones que dan el esfuerzo en una barra en función de los desplazamientos de sus extremos son las siguientes: (Ver fig. 1)



$$F = \frac{AE}{L^2} (L_x \Delta x + L_y \Delta y + L_z \Delta z)$$

$$F_x = F \frac{L_x}{L} = \frac{AE}{L^2} (L_x^2 \Delta x + L_x L_y \Delta y + L_x L_z \Delta z)$$

$$F_y = F \frac{L_y}{L} = \frac{AE}{L^2} (L_x L_y \Delta x + L_y^2 \Delta y + L_y L_z \Delta z)$$

$$F_z = F \frac{L_z}{L} = \frac{AE}{L^2} (L_x L_z \Delta x + L_y L_z \Delta y + L_z^2 \Delta z)$$

El número de ecuaciones simultáneas a que da origen este método puede ser sumamente grande, de modo que la resolución se hace mediante aproximaciones sucesivas. (1)

2. Leyes comunes entre una malla eléctrica y el enrejado de nudos articulados

Hemos visto que en un enrejado hiper-estático hay infinitas maneras de satisfacer el sistema de ecuaciones que proporciona la aplicación de la estática a cada nudo, pero que sólo una de ellas verifica simultáneamente la condición de «continuidad» impuesta por el hecho de que «barras primitivamente concurrentes en un punto deben mantenerse concurrentes».

En una red eléctrica rigen igualmente dos condiciones:

- 1) Los voltajes de los nudos son iguales para todas las ramas que a él concurren.
- 2) La suma de las corrientes en cada nudo es cero.

La primera condición es equivalente a la condición de continuidad de un enrejado. La segunda, a las ecuaciones de la estática.

Las redes eléctricas obedecen a las leyes de Kirchoff.

Estas son:

- 1) Ley de los nudos:

«La suma de las corrientes que concurren a un nudo es cero.»

- 2) Ley de las mallas:

«Si se recorre una malla cerrada, la suma de las fuerzas electromotrices y de las caídas de tensión producidas por las corrientes es nula.»

En un enrejado de nudos articulados se verifican leyes enteramente similares a las de Kirchoff.

- 1) Ley de los nudos.

«La suma de las fuerzas que concurren a un nudo es cero.»

- 2) Ley de las mallas.

(1) «Relaxation Methods in Engineering Science» por R. V. Southwell.

«Si se recorre una malla cerrada, la suma de los desplazamientos aplicados y los debidos a la acción de las fuerzas es cero.»

Comparando las leyes de Kirchoff para la mallla eléctrica y el enrejado mecánico, observamos la identidad formal que existe entre «corrientes» y «fuerzas» así como de «voltajes» y «desplazamientos».

Una fuerza electromotriz aplicada equivale a un desplazamiento brusco entre dos secciones

Por otra parte y para completar la analogía, observaremos que la ley que liga entre sí a voltajes y corrientes en una rama eléctrica es formalmente similar a la que liga deformación y fuerza en una barra. La primera es la Ley de Ohm; la segunda es la ley de Hooke.

El problema de encontrar una malla equivalente al enrejado consistía, pues, en proyectarla de modo que las corrientes que recorrieran la malla tuviesen entre sí desfases iguales a los ángulos que existían entre las barras del enrejado.

Sin embargo, ese camino era por demás complejo e innecesario.

3. De los vectores a los escalares

a) Malla eléctrica.

Si una malla eléctrica tiene sólo resistencias y fuerzas electromotrices en fase, las leyes de Kirchoff se pueden escribir en forma escalar.

b) Enrejado.

En un enrejado se verifica:

1) Que la suma de las proyecciones de las fuerzas que concurren a cada nudo, según cualquier dirección, es cero.

2) Que la suma de las proyecciones de los desplazamientos, según cualquier dirección, es cero.

Las relaciones a que dan origen las consideraciones anteriores son también escalares. Se observa, pues, que las Leyes de Kirchoff se aplican al enrejado no sólo para las fuerzas y desplazamientos como vectores, sino también para sus componentes escalares.

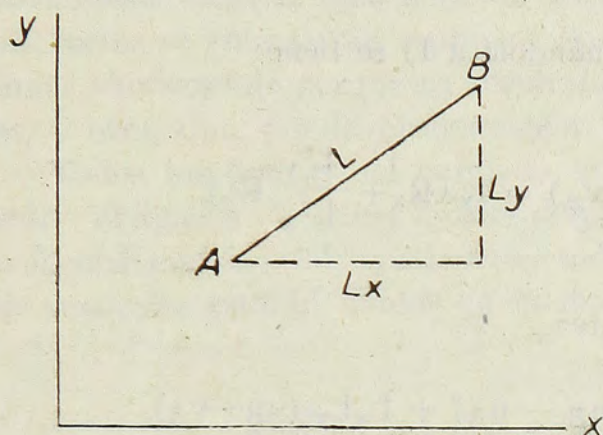
En consecuencia, se podrá representar un enrejado mediante tres mallas eléctricamente aisladas, en cada una de las cuales los voltajes y corrientes equivalen a las «proyecciones, según las tres direcciones de los ejes coordenados, de las fuerzas y desplazamientos del enrejado».

Como las mallas deben encontrarse eléctricamente aisladas para que las leyes de Kirchoff se cumplan independientemente en cada una, se debe buscar otro medio de ligazón entre ellas para obligar a sus elementos a cumplir las condiciones impuestas por la razón entre las proyecciones según cada eje que fija la posición de cada barra en el espacio.

Para ello se utilizan transformadores de corriente, es decir, se liga mediante flujos magnéticos los elementos de las distintas mallas. Estos transformadores mantienen fija la razón entre las corrientes que atraviesan sus dos enrollados. El uso de transformadores obliga a emplear corriente alterna en la malla eléctrica.

4. Representación eléctrica de una barra. Enrejado plano

Sea AB la barra; «x» e «y» los ejes coordenados. De acuerdo con las fórmulas establecidas anteriormente, si A y B se desplazan en u_A, v_A, u_B, v_B , el esfuerzo interno en AB valdrá:



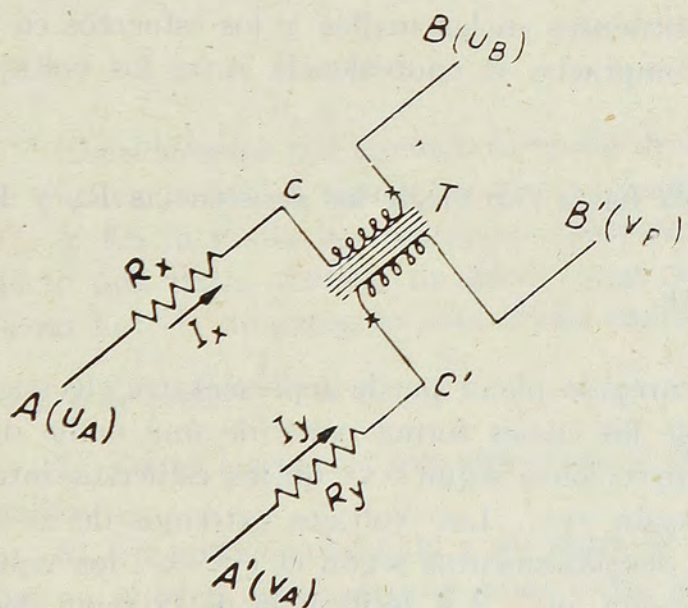
$$F_{AB} = \frac{AE}{L^2} (L_x \overbrace{u_A - u_B} + L_y \overbrace{v_A - v_B})$$

Y sus proyecciones según los ejes «x» e «y»:

$$F_x = \frac{AE}{L^3} (L_x^2 \overbrace{u_A - u_B} + L_x L_y \overbrace{v_A - v_B})$$

$$F_y = \frac{AE}{L^3} (L_x L_y \overbrace{u_A - u_B} + L_y^2 \overbrace{v_A - v_B})$$

Consideremos en seguida, las ramas AB y A'B', ligadas por el transformador de corriente T, que se muestran en la figura adjunta. Llamemos I_x e I_y las corrientes que pasan por ellas; u_A y u_B los voltajes de A y B; v_A y v_B los voltajes de A' y B'; R_x y R_y las resistencias de cada rama.



Aplicando la ley de las mallas a cada rama se tiene:

$$1) \quad u_B - u_A = I_x R_x + u_{CB}$$

$$2) \quad v_B - v_A = I_y R_y + v_{C'B'}$$

El transformador de corriente impone además las condiciones:

$$\frac{I_x}{I_y} = \frac{L_x}{L_y} ; \quad \frac{u_{CB}}{v_{C'B'}} = - \frac{L_y}{L_x}$$

Introduciendo estas relaciones en la ecuación 2) tendremos:

$$v_B - v_A = I_x \frac{L_y}{L_x} R_y - \frac{L_x}{L_y} u_{cB}$$

Multiplicando esta ecuación por $\frac{L_y}{L_x}$ y sumándola a 1) se tiene:

$$u_B - u_A + \frac{L_y}{L_x} (v_B - v_A) = I_x \left(R_x + \frac{L_y^2}{L_x^2} R_y \right)$$

Amplificando por L_x^2 se obtiene finalmente:

$$3) \quad I_x (L_x^2 R_x + L_y^2 R_y) = L_x^2 (u_B - u_A) + L_x L_y (v_B - v_A)$$

Del mismo modo se tiene:

$$4) \quad I_y (L_y^2 R_y + L_x^2 R_x) = L_y^2 (v_B - v_A) + L_x L_y (u_B - u_A)$$

Si comparamos estas ecuaciones, 3) y 4), con las expresiones de los esfuerzos F_x y F_y escritas anteriormente, observamos que basta hacer

$$5) \quad L_x^2 R_x + L_y^2 R_y = \frac{L^3}{AE}$$

para que ambas expresiones, la de las corrientes en las mallas y los esfuerzos en la barra, sean idénticas. Igualmente se comprueba la equivalencia entre los voltajes y los desplazamientos.

Para que la expresión 5) se cumpla basta con elegir las resistencias R_x y R_y iguales: $\frac{L}{AE}$; $\frac{L}{AE} (L_x^2 + L_y^2) = \frac{L^3}{AE}$

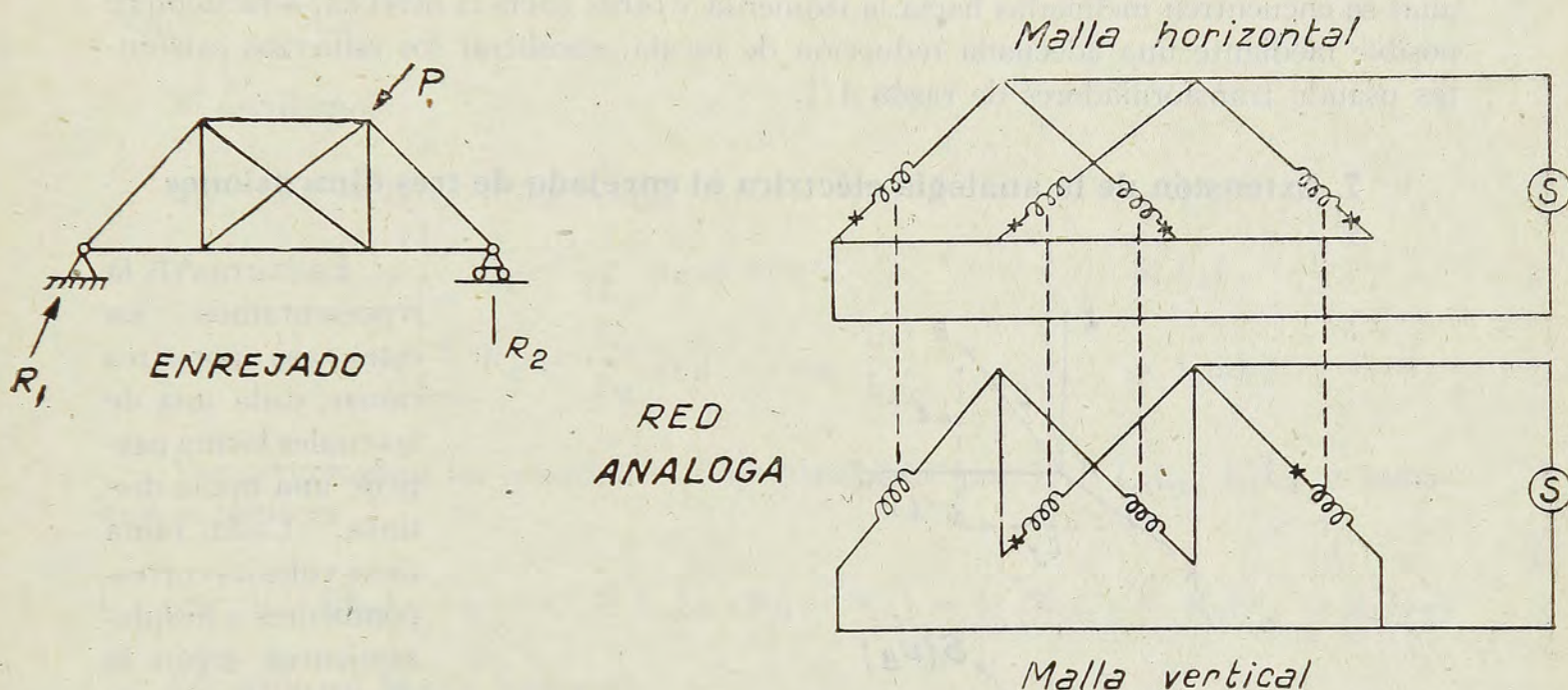
En consecuencia, una barra de un enrejado plano puede representarse eléctricamente mediante dos ramas, cada una de las cuales forma parte de una malla distinta. Por una de ellas circulan las proyecciones según «x» de los esfuerzos internos; por la segunda, las proyecciones según «y». Los voltajes extremos de la rama de la primera malla representan los desplazamientos según el eje «x»; los voltajes de la segunda, los desplazamientos según «y». La resistencia de la rama debe valer $\frac{L}{AE}$, y ambas ramas deben estar ligadas por un transformador de corriente de razón $\frac{L_x}{L_y}$.

Encontrada la representación eléctrica del elemento fundamental del enrejado podemos pasar a la representación de la estructura mediante la adecuada combinación de estos elementos.

5. Representación eléctrica de un enrejado plano

La representación eléctrica de un enrejado se puede deducir del estudio hecho previamente sobre la aplicación de las leyes de Kirchoff en electricidad y elasticidad. Las barras se encuentran representadas en dos mallas eléctricas; una, que podemos llamar «horizontal» porque es recorrida por las componentes horizontales de las fuerzas, y otra, que, por la misma razón, podemos llamar «vertical».

Todos los puntos del enrejado que, por condiciones de continuidad o ligazón están obligados a tener iguales desplazamientos horizontales, deberán estar unidos en la malla horizontal; igualmente, todos aquellos que tengan iguales desplazamientos verticales estarán unidos en la malla «vertical».



Consideremos por ejemplo la malla de la figura obtenida a partir del enrejado. Se pueden hacer las siguientes observaciones:

1) En la malla horizontal no aparecen las barras verticales y viceversa. En efecto una barra vertical no puede tener fuerzas de dirección horizontal; el hecho de no hacerla aparecer en esta malla equivale a suponer un transformador de corriente de razón

$$\frac{L_x}{L_y} = 0.$$

2) Todas las barras que concurren a un nudo, concurren igualmente en ambas mallas.

3) Un nudo constreñido a no moverse tiene voltaje cero. Si hay varios nudos que no pueden desplazarse se unen entre sí, puesto que su desplazamiento relativo es nulo y por lo tanto sus voltajes deben ser iguales.

4) Las cargas externas aplicadas se introducen mediante fuentes eléctricas exteriores. La corriente penetra por el nudo en que se aplica la fuerza y retorna por los apoyos. Un apoyo fijo tiene potencial cero en ambas mallas. Un apoyo móvil, como el 4 de la figura, tiene potencial nulo sólo en la malla vertical, puesto que sólo en esa dirección está imposibilitado para moverse.

5) La fuente de voltaje de ambas mallas puede ser la misma ya que ambas mallas no tienen contacto eléctrico entre sí. Si no es la misma, ambas fuentes deben estar en fase.

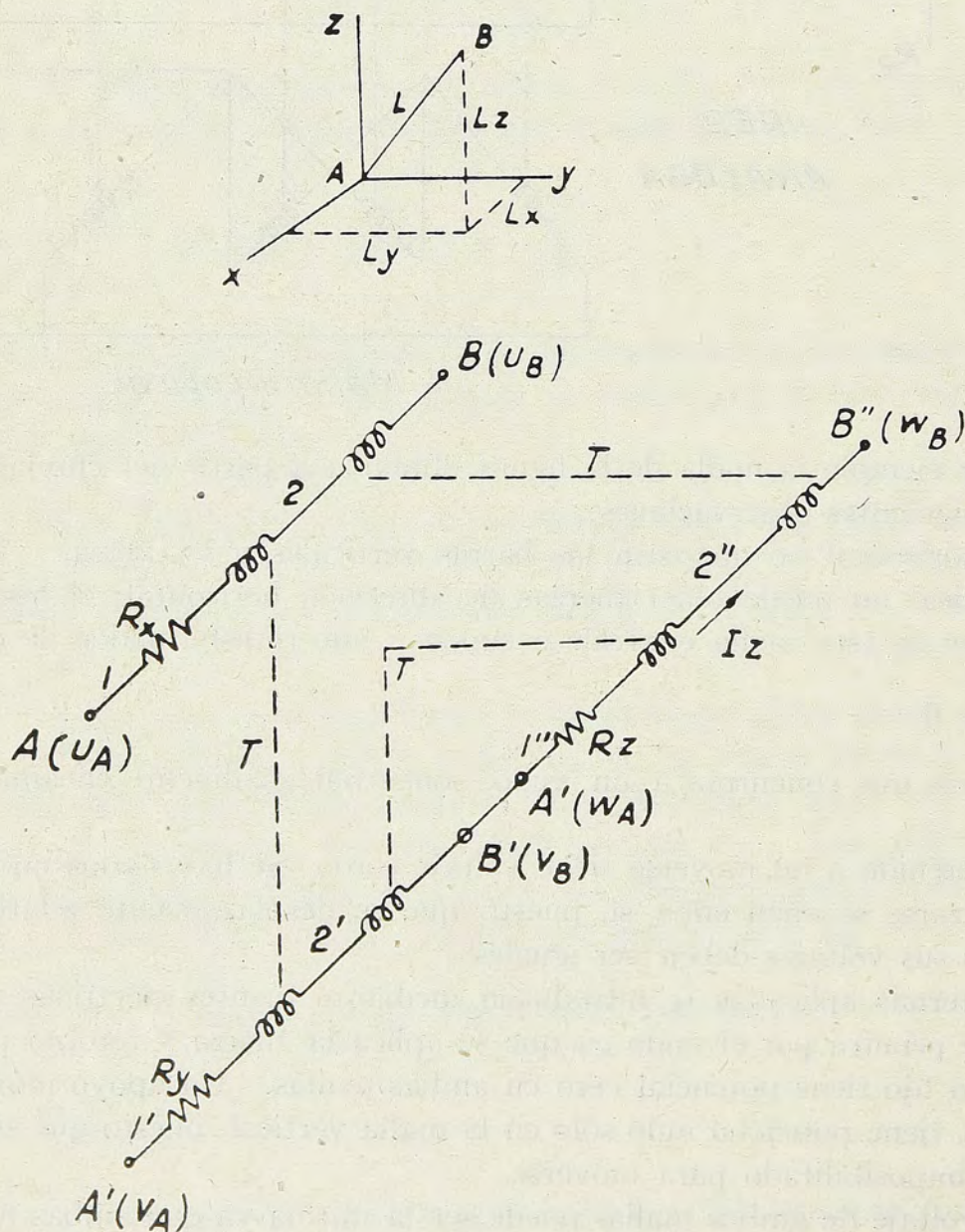
6) Debe tenerse presente que la polaridad de los transformadores sea la correcta de acuerdo con la deducción de la fórmula. Los transformadores de las diagonales 2-6 y 1-5 tendrán polaridad positiva; en cambio los de las diagonales 3-5 o 4-6 tendrán polaridad negativa. En realidad bastará con conectar las barras inclinadas en un sentido con la polaridad contraria a las de las barras conectadas en el otro sentido.

Tomando en cuenta estas observaciones se puede deducir expeditamente en cada caso la representación eléctrica de cualquier enrejado plano.

6. Caso de enrejados cuyas diagonales tiene la misma inclinación

Si todas las barras diagonales del enrejado tienen la misma inclinación aunque unas se encuentren inclinadas hacia la izquierda y otras hacia la derecha, será siempre posible mediante una adecuada reducción de escala, encontrar los esfuerzos existentes usando transformadores de razón 1/1.

7. Extensión de la analogía eléctrica al enrejado de tres dimensiones



La barra AB la representamos en este caso por tres ramas, cada una de las cuales forma parte de una malla distinta. Cada rama tiene voltajes correspondientes a desplazamientos según la dirección de uno de los ejes coordenados y corrientes que corresponden a las proyecciones de los esfuerzos según el mismo eje coordenado.

Sean las tres ramas AB, A'B', A''B''; sus resistencias las llamamos R_x R_y R_z .

Cada rama posee dos transformadores de corriente cuyas razones son las que corresponden a las proyecciones de la barra según los ejes de coordenadas.

Designamos con las letras «u» «v» y «w» los voltajes de las ramas AB, A'B', A''B'', respectivamente.

Se tiene:

- 1) $u_B - u_A = I_x R_x + u_{12} + u_{2B}$
- 2) $v_B - v_A = I_y R_y + v_{1'2'} + v_{2'B'}$
- 3) $w_B - w_A = I_z R_z + w_{1''2''} + w_{2''B''}$

Además los transformadores imponen las condiciones:

$$\frac{I_y}{I_x} = \frac{L_y}{L_x} ; \quad \frac{I_z}{I_x} = \frac{L_z}{L_x} ; \quad \frac{v_{1'2'}}{u_{12}} = -\frac{L_x}{L_y} ; \quad \frac{v_{1'2'}}{w_{2''B''}} = -\frac{L_z}{L_y} ;$$

$$\frac{w_{2''B''}}{u_{2B}} = -\frac{L_x}{L_z} ; \text{ etc.}$$

Si escribimos:

$$\begin{array}{l} u_B - u_A = I_x R_x + u_{12} + u_{2B} \\ v_B - v_A = I_x \frac{L_y}{L_x} R_y - \frac{L_x}{L_y} u_{12} + v_{2'B'} \\ w_B - w_A = I_x \frac{L_z}{L_x} R_z - \frac{L_y}{L_z} v_{2'B'} - u_{2B} \frac{L_x}{L_z} \end{array} \left| \begin{array}{l} \times L_x^2 \\ \times L_x L_y \\ \times L_x L_z \end{array} \right.$$

Y multiplicamos las ecuaciones respectivamente por L_x^2 , $L_x L_y$, $L_x L_z$ y sumamos se obtiene:

$$L_x^2 (u_B - u_A) + L_x L_y (v_B - v_A) + L_x L_z (w_B - w_A) = I_x (R_x L_x^2 + R_y L_y^2 + R_z L_z^2)$$

Ecuación en la que haciendo:

$$R_x = R_y = R_z = \frac{L}{AE}$$

Obtenemos la ecuación final:

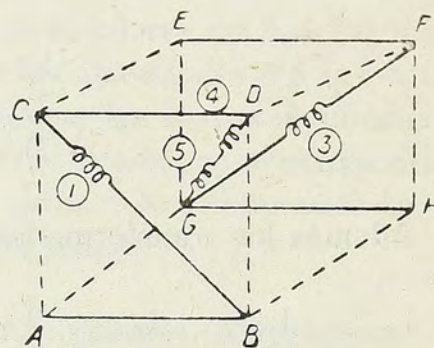
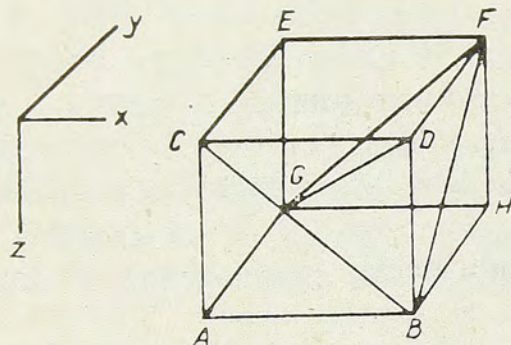
$$I_x = \frac{AE}{L^3} (L_x^2 \overbrace{u_B - u_A} + L_x L_y \overbrace{v_B - v_A} + L_x L_z \overbrace{w_B - w_A})$$

enteramente análoga a la ecuación del enrejado.

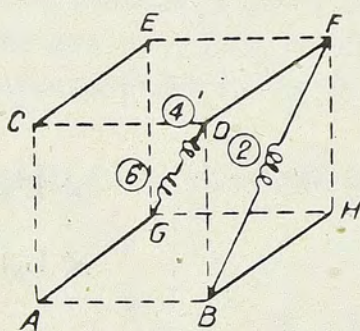
8. Ejemplo de representación de un enrejado espacial

En la figura siguiente hemos dibujado las mallas equivalentes al enrejado espacial del ejemplo. Se puede observar:

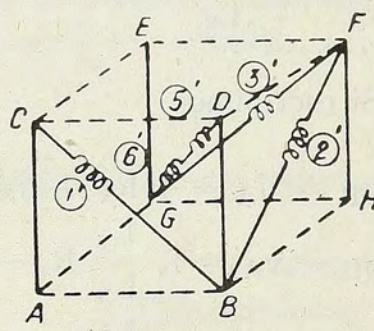
- 1) Las barras que tienen la dirección de uno de los ejes no aparecen en las mallas de los otros ejes y carecen de transformadores de corriente.
- 2) Las barras contenidas en uno de los planos xy, yz, zx, aparecen en dos mallas y tienen un sólo transformador.
- 3) Sólo las barras que tienen una dirección cualquiera aparecen en las tres mallas e incluyen tres transformadores.



MALLA X



MALLA Y



MALLA Z

Transformadores = ①-①', ②-②', ⑥-⑥'

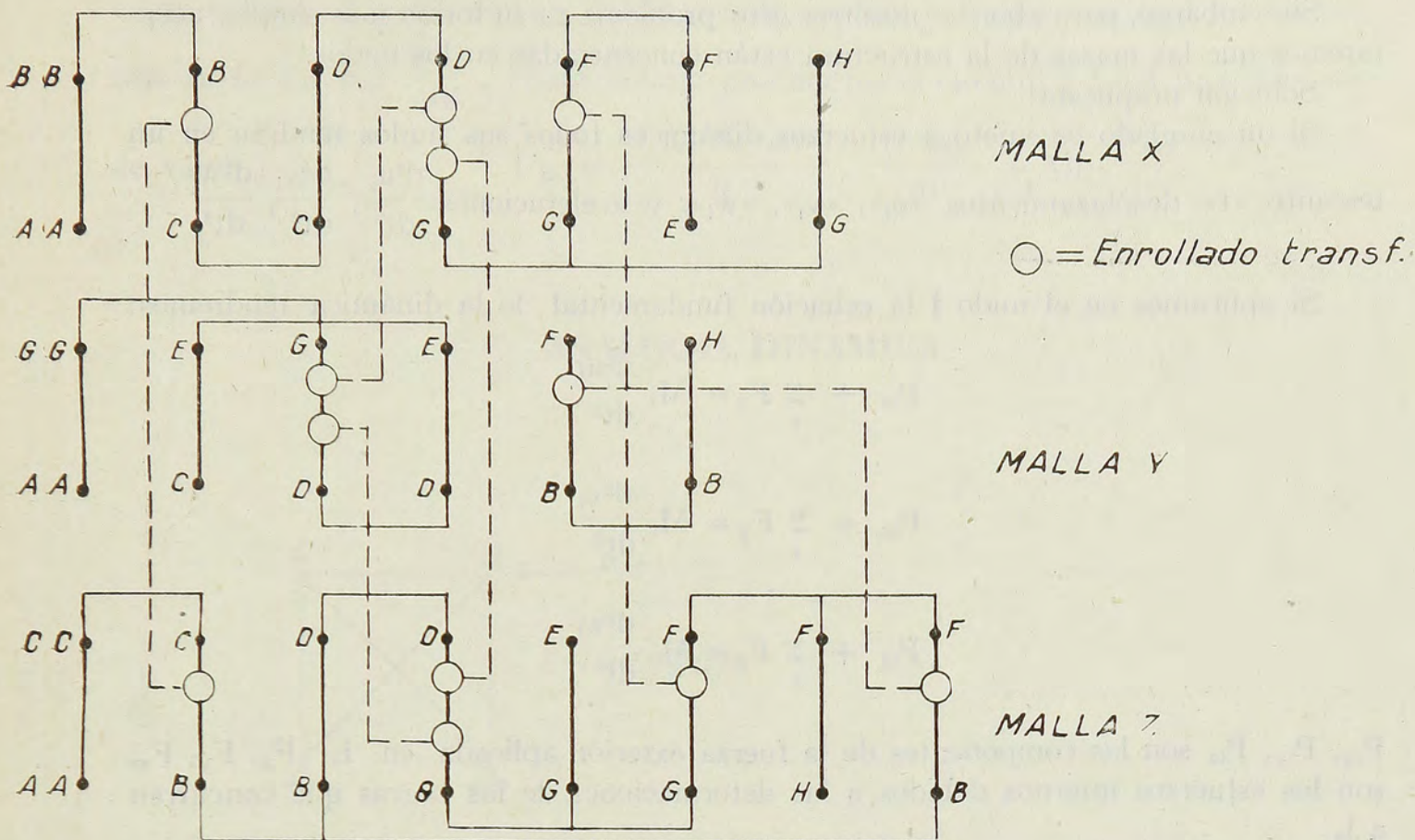
Deliberadamente se ha dibujado un caso en que no hay fuerzas exteriores ni se indican los apoyos, con el objeto de mostrar, a partir de la analogía eléctrica, cómo se puede saber directamente si hay o no, en determinadas condiciones, esfuerzo en una barra. En efecto, se puede observar que las ramas AB, GH y EF de la malla «x»; las AC, FH, EG de la malla «z»; y las EC, AG y BH de la malla «y», están en circuito abierto, lo que significa que sólo pasará corriente por ellas si el circuito se cierra exteriormente mediante la aplicación de una corriente en el extremo abierto. En otras palabras, esas barras tendrán esfuerzo sólo si existen fuerzas externas aplicadas en ellas y en su misma dirección.

9. Representación sistemática de los enrejados

A través del último ejemplo se puede percibir la creciente dificultad que presenta la representación de enrejados complejos en un esquema. Por otra parte, la construcción del aparato eléctrico obliga a disponer los elementos representativos de las barras de modo que ocupen un espacio mínimo. Es por eso que hemos pensado en una representación formada por tres series de elementos colocados paralelamente, cada una de las cuales corresponde a una de las mallas x, y, z. En esa forma el enrejado del ejemplo anterior quedaría dibujado como se indica en la siguiente figura.

Cada elemento representa una rama. Las letras extremas del elemento son las mismas letras que designan la barra. Debe notarse:

- 1) Dentro de cada malla se unen los vértices que llevan la misma letra.



2) Los elementos de igual nombre de mallas diferentes están ligados por transformadores.

10. Enrejado sujeto a esfuerzos dinámicos

La solución del problema del enrejado solicitado por fuerzas estáticas supone que estas fuerzas crecen lentamente (en teoría demoran un tiempo infinitamente largo) desde cero hasta su verdadero valor. Esta suposición implica que las masas que forman el enrejado se mueven con una aceleración nula desde la posición de equilibrio primitiva hasta la final. En realidad, es frecuente el caso en que esta aceleración, si bien no es nunca cero, es suficientemente pequeña. A veces suele suceder que las masas de la estructura sean de poca importancia. En ambos casos los esfuerzos reales que se desarrollen en la estructura serán prácticamente iguales a los que proporcione el cálculo estático.

En efecto, si una masa tienen una aceleración «a» es necesario que sobre ella actúe una fuerza $F = ma$ (Ley de Newton). Inversamente, una masa con aceleración «a» ejerce sobre el medio al cual está ligada una fuerza $F' = -ma$ (Principio de acción y reacción).

Luego, si una masa M de una estructura posee una aceleración A ejercerá sobre la estructura una fuerza $= -MA$ a través de las ligazones elásticas existentes entre ella y la estructura.

La solución «exacta» del problema dinámico sólo podría hacerse sin aceptar hipótesis simplificadoras, es decir, considerando las masas distribuídas. Además sería necesario conocer el comportamiento dinámico del material y verificar si el módulo E de elasticidad tiene el mismo valor para deformaciones dinámicas que estáticas.

Sin embargo, para abordar nosotros este problema en su forma más simple, aceptaremos que las masas de la estructura están concentradas en los nudos.

Solución propuesta:

Si un enrejado es sujeto a esfuerzos dinámicos todos sus nudos tendrán en un instante «t» desplazamientos « u_i », « v_i », « w_i », y aceleraciones $\frac{d^2u_i}{dt^2}$, $\frac{d^2v_i}{dt^2}$, $\frac{d^2w_i}{dt^2}$

Si aplicamos en el nudo i la ecuación fundamental de la dinámica tendremos:

$$P_{ix} + \sum_i F_x = M_i \frac{d^2u_i}{dt^2}$$

$$P_{iy} + \sum_i F_y = M_i \frac{d^2v_i}{dt^2}$$

$$P_{iz} + \sum_i F_z = M_i \frac{d^2w_i}{dt^2}$$

P_{ix} , P_{iy} , P_{iz} son las componentes de la fuerza exterior aplicada en i . F_x , F_y , F_z , son los esfuerzos internos debidos a las deformaciones de las barras que concurren a i .

De las ecuaciones anteriores se infiere que el problema dinámico es, en cada instante, equivalente al problema estático si a las fuerzas exteriores aplicadas P agregamos las «fuerzas de Inercia» — MA . De aquí se desprende también, que una sollicitación dinámica dará iguales resultados a una estática si se acepta que $MA=0$, lo que puede deberse a desprecio de M o de A .

La solución matemática del sistema de ecuaciones anterior extendido a todos los nudos de la estructura, implica en general resolver un sistema de $3n$ ecuaciones diferenciales de segundo grado con $3n$ incógnitas que son funciones del tiempo «t».

El problema, sin embargo, puede resolverse, al menos teóricamente, con un esquema eléctrico como el que indica la figura de la página siguiente. Si el enrejado tiene más nudos la aplicación es enteramente análoga. Para no complicar el esquema no hemos señalado con línea de puntos el enlace magnético de los transformadores de las mallas.

Consideremos por ejemplo el nudo D de la malla horizontal. A él penetra, en el instante «t», la corriente $P(t)$ representativa de la fuerza exterior aplicada y la corriente I_D que, como se verá, representa la fuerza de inercia = — $M_D \frac{d^2u_D}{dt^2}$

F y G son dos Triodos.

El voltaje u_D de D se aplica a la grilla del triodo y produce en la corriente base una variación dada por

$$i_F = i_{OF} + K_F u_D$$

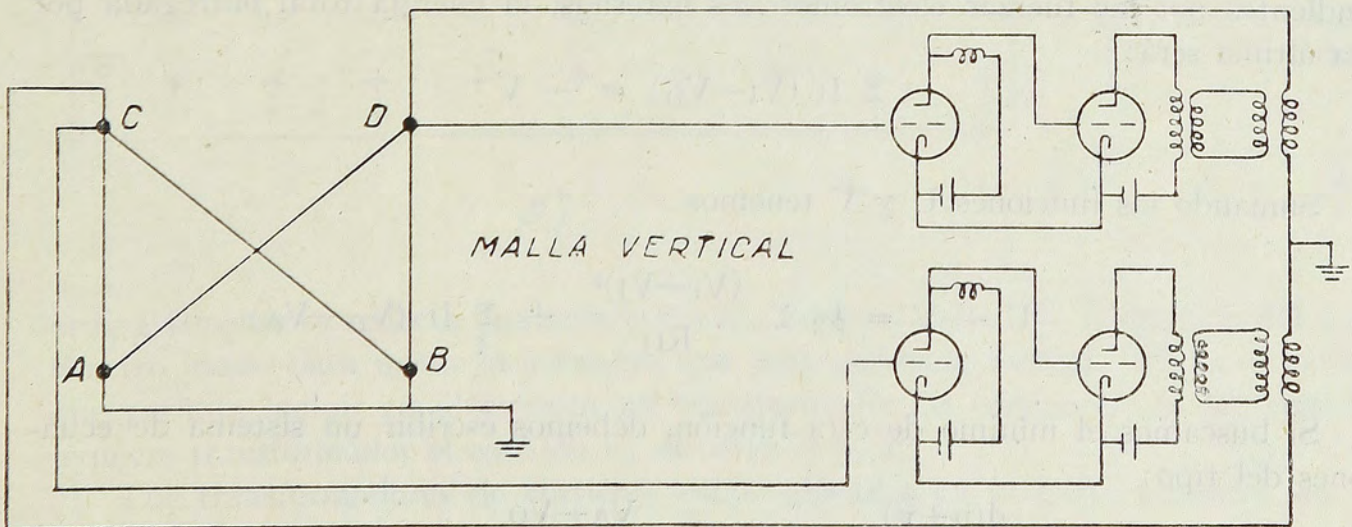
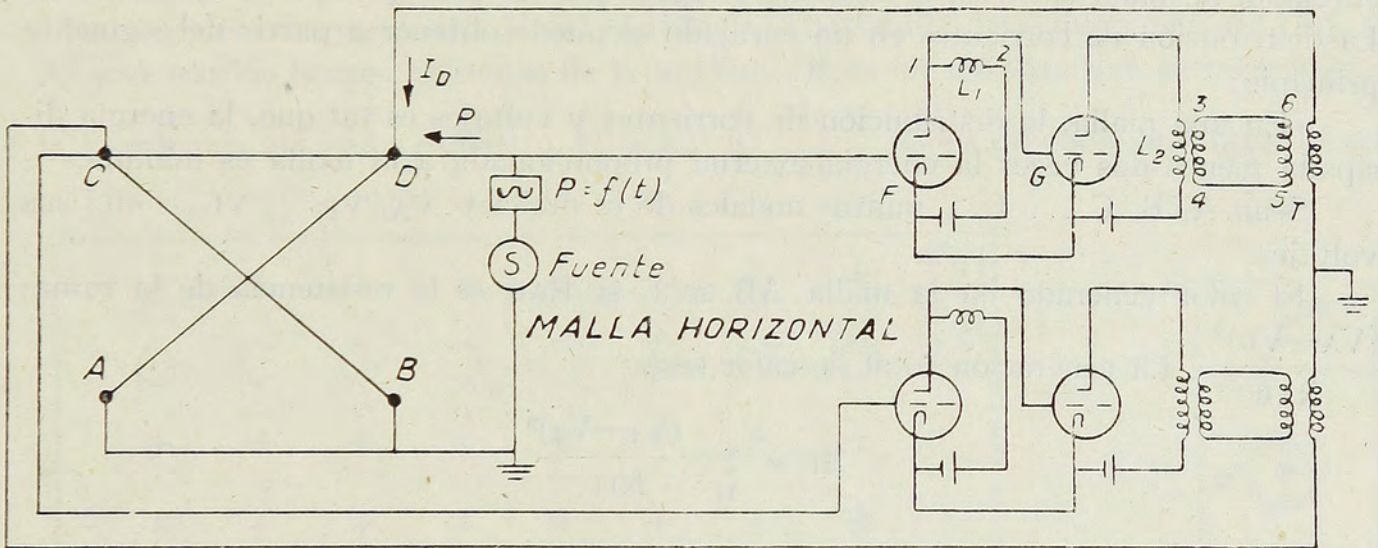
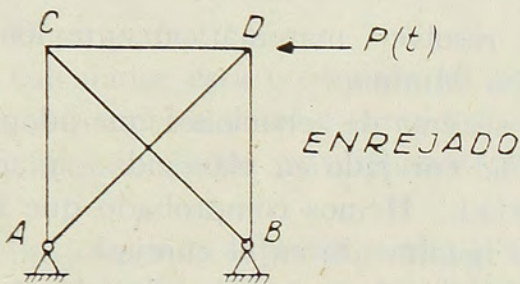
esta corriente produce en los extremos 1-2 de la bobina inductiva L un voltaje de valor

$$e_{12} = -L_1 \frac{di_F}{dt} = -L_1 K_F \frac{du_D}{dt}$$

e_{12} se aplica en la grilla de G y análogamente produce entre los puntos 3 y 4 un voltaje $L_1 L_2 K_F K_G \frac{d^2 u_D}{dt^2}$. Este voltaje produce en el circuito 3-5-6-4 una corriente

de valor
$$I'_D = \frac{L_1 L_2 K_F K_G}{R} \frac{d^2 u_D}{dt^2} = M_D \frac{d^2 u_D}{dt^2}$$

ANALOGIA DINAMICA



Esta corriente, al pasar por el transformador de corriente de razón 1|1 de la figura produce la circulación de

$$I_D = - M_D \frac{d^2 u_D}{dt^2}$$

El circuito que se propone cumple teóricamente con las condiciones necesarias para resolver el problema dinámico planteado. Su diseño práctico tiene sin embargo una serie de dificultades, la principal de las cuales es la necesidad de utilizar circuitos de poca carga en los secundarios de los transformadores de corriente.

11. El principio de energía mínima en electricidad

Los diferentes métodos utilizados para resolver matemáticamente los enrejados pueden deducirse del Principio de Energía Mínima.

Hemos señalado el paralelismo entre un sistema de ecuaciones que adopta como incógnitas los desplazamientos de los nudos del enrejado en elasticidad, y aquél que adopta los voltajes de los nudos en electricidad. Hemos comprobado que leyes semejantes a las de Kirchoff pueden escribirse igualmente en el enrejado.

Todo lo anterior no es una mera coincidencia formal. En efecto, así como el enrejado, la malla eléctrica se encuentra regida por un principio de energía mínima. La distribución de corrientes en un enrejado se puede obtener a partir del siguiente principio:

«En una malla, la distribución de corrientes y voltajes es tal que, la energía disipada menos dos veces la energía externa proporcionada a la malla es mínima.»

Sean A, B, C, ... I. ... puntos nodales de la malla y $V_A, V_B, \dots, V_I, \dots$ etc. sus voltajes.

El calor generado en la malla AB será, si R_{AB} es la resistencia de la rama: $\frac{(V_A - V_B)^2}{R_{AB}}$. La generación total de calor será

$$2u = \sum_{IJ} \frac{(V_I - V_J)^2}{R_{IJ}}$$

Si llamamos $I_A, I_B, \dots, I_I, \dots$ a las corrientes proporcionadas en los nudos correspondientes por las fuerzas electromotrices externas, la energía total entregada por esta última será:

$$\sum_I I_I (V_I - V_D) = -V$$

Sumando las funciones U y V tenemos.

$$U + V = \frac{1}{2} \sum \frac{(V_I - V_J)^2}{R_{IJ}} + \sum_I I_I (V_D - V_A)$$

Si buscamos el mínimo de esta función, debemos escribir un sistema de ecuaciones del tipo:

$$\frac{d(u+v)}{dv_A} = 0 = \sum_A \frac{V_A - V_D}{R_{AD}} - I_A = 0$$

Observando esta ecuación comprobamos que no es otra que la aplicación de la ley de los nudos. En cuanto a la segunda ley de Kirchoff, ésta es una consecuencia de la adopción de voltajes únicos en cada nudo. El término cuadrático U , que representa en este caso la energía disipada internamente por calor Joule, es análogo al término U representativo de la energía interna elástica de deformación del enrejado. El término lineal V , que representa en este caso la energía eléctrica externa que se proporciona a la red, es en el enrejado el trabajo de las fuerzas externas.

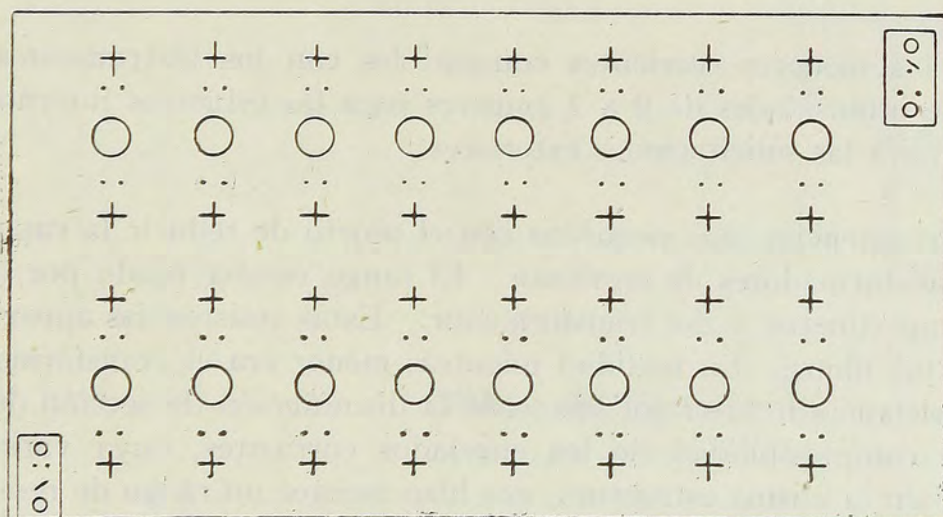
Finalmente, se puede comprobar del análisis del término U en ambos casos que la compresibilidad y la conductancia juegan un papel análogo, ya que ambos son los coeficientes de los paréntesis $(u_j - u_j)^2$.

12. Descripción y diseño del calculador eléctrico

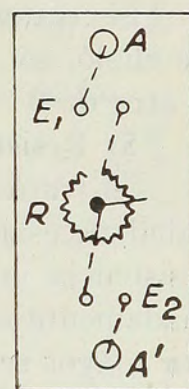
1) Descripción

El calculador está contenido en un tablero rectangular de ebonita. Consta de dos hileras paralelas de elementos unitarios representativos de cada rama de la malla. La hilera superior permite materializar la malla horizontal; la inferior la malla vertical.

En las esquinas superior derecha e inferior izquierda hay un enchufe y un interruptor con el objeto de conectar las mallas horizontal y vertical respectivamente a la fuente de energía eléctrica. (Fig. a) Cada unidad de las ocho «verticales» y ocho «horizontales» de que consta el calculador está construída del siguiente modo: (Fig. b) A' y A son los bornes extremos de la unidad. R es un reóstato que permite ajustar la resistencia de cada elemento al valor $K \frac{L}{AE}$. E_1 es un enchufe hembra donde



a)



b)

ordinariamente se conecta una resistencia fija de igual valor a la resistencia del amperímetro usado para medir la corriente que pasa por cada unidad. E_2 es un enchufe que permite incluir en el circuito un transformador de corriente. Si la unidad no requiere transformador el enchufe E_2 se cortocircuita.

Los transformadores de corriente están ubicados en la parte posterior del calculador y se conectan a él mediante enchufes.

2) Extensión:

El tablero está realizado y diseñado de modo que para estudiar enrejados más complejos, con un número mayor de elementos, basta agregarle unidades exactamente iguales a las que actualmente posee.

3) Diseño:

El diseño de los elementos que constituyen el calculador se hizo atendiendo a dos consideraciones:

a) Operación rápida y sencilla.

b) Costo mínimo.

La primera de estas consideraciones incluía:

A. Disposición normalizada de todos los elementos.

B. Medida de las magnitudes eléctricas con instrumentos de medición directa, ampérmetros y vóltmetros.

C. Posibilidad de hacer todas las medidas sin necesidad de alterar en cada ocasión los valores de las resistencias de los elementos.

La segunda consideración incluía:

A. Costo de los instrumentos de medida.

B. Costo de los transformadores de corriente.

C. Costo de los reóstatos.

El problema de encontrar un costo mínimo respetando los requerimientos de una operación rápida y sencilla obligaba a balancear fundamentalmente dos ítems. En efecto, por una parte mientras menor fuese la corriente de trabajo, más bajo sería el costo de los transformadores de corriente; pero, por otra parte, mayor sería el costo de los instrumentos de medida y de los reóstatos. El factor decisivo en este caso fué que, mientras para medir intensidades superiores a 1 amp. existían instrumentos apropiados disponibles sin ningún costo, para medir corrientes inferiores no existían y se habría debido recurrir a métodos de medida indirecta.

4) Corrientes:

Se trataba de usar las menores corrientes compatibles con los instrumentos. Se eligió, así, un rango de intensidades de 0 a 2 amperes para las estuercos internos y otro de 0 a 5 amperes para las sollicitaciones exteriores.

5) Resistencias:

Se trató de usar las resistencias más pequeñas con el objeto de reducir la capacidad necesaria de los transformadores de corriente. El rango estaba fijado por la resistencia interna del amperímetro y del transformador. Estas resistencias aproximadamente equivalían a 0.5 ohms. En realidad mientras menor era el transformador mayor se hacía su resistencia interna por efecto de la disminución de sección del conductor. La diferente compresibilidad de los enrejados corrientes, cuya variación es del orden de 1 a 5 en la misma estructura, nos hizo escoger un rango de resistencias entre 0 y 2,5 ohms.

6) Transformadores de corriente:

La capacidad de los transformadores estaba fijada por el rango de corrientes, 0 a 2 amp. y el rango de resistencias de 0 a 2.5 ohms.

En cuanto a sus curvas de operación, el transformador debía aproximarse al máximo al transformador «ideal» supuesto en la deducción de la analogía.

Esto incluía:

1) Razón de transformación invariable dentro de todo el rango de la carga.

2) Concordancia de fase entre las corrientes primaria y secundaria.

Ambos requerimientos obligaban a:

a) Usar densidad de flujo mínima, no mayor de 1000 gauss, para reducir la corriente magnetizante, e impedir la saturación.

b) Usar fierro laminado de alta calidad magnética para reducir la componente wattada de la corriente de excitación.

c) Disponer el enrollado de modo de reducir al mínimo el valor de la reactancia de fuga.

Para reducir la inductancia de fuga se enrollaron paralelamente los alambres del primario y del secundario.

Una vez construido uno de los transformadores, se midió la razón de transformación y la reactancia de fuga. No fué posible, con los instrumentos disponibles, encontrar errores en la razón de transformación ni avaluar el valor de la reactancia de fuga que resultó prácticamente nula.

13. Resolución eléctrica de un enrejado con 4 tipos de carga

En la figura adjunta se indica el diagrama de conexiones del calculador y en la tabla inferior los valores obtenidos experimentalmente y su comparación con el Método de las Fuerzas y el Método de Southwell.

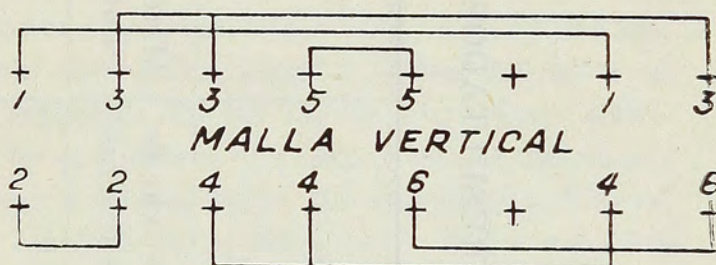
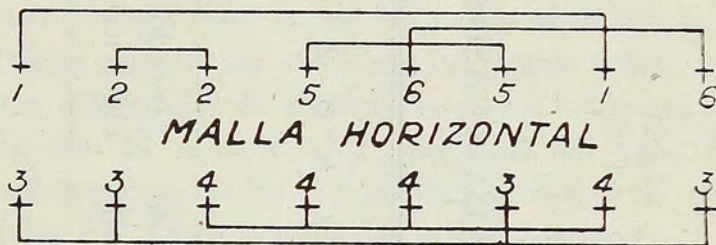
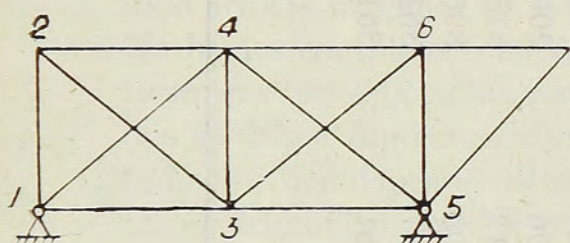


Tabla de Resistencias

1.2.....	1
1.3.....	0.660
1.4.....	2.021
2.3.....	2.021
2.4.....	0.833
3.4.....	0.556
3.5.....	0.588
3.6.....	1.570
4.5.....	1.570
4.6.....	0.715
5.6.....	0.800

TABLA DE COMPARACION DE LOS RESULTADOS PARA 3 CASOS DE SOLICITACION DEL ENREJADO ANTERIOR

BARRA	C A S O 1		NUDO 3		C A S O 2		NUDO 4		C A S O 3		NUDO 7	
	Método Southwell	Método eléctrico	Método de las fuerzas	Método de las fuerzas	Método Southwell	Método eléctrico	Método de las fuerzas	Método de las fuerzas	Método Southwell	Método eléctrico	Método de las fuerzas	Método de las fuerzas
12.....	-.236	-.238	-.234	.011	.008	.011	.011	.011	.200	.198	.194	.194
13.....	.001	.002	.003	.195	.195	.195	.180	.180	.208	.218	.220	.220
14.....	-.364	-.379	-.376	.014	.014	.008	.016	.016	.438	.430	.433	.433
23.....	.322	.335	.331	-.018	-.018	-.010	-.016	-.016	-.284	-.276	-.274	-.274
24.....	-.237	-.235	-.235	-.003	-.003	.007	.011	.011	.202	.196	.194	.194
34.....	.534	.535	.537	.354	.354	.357	.353	.353	-.099	-.070	-.075	-.075
35.....	-.007	-.001	-.002	.196	.196	.200	.195	.195	-.232	-.244	-.243	-.243
36.....	.346	.333	.338	.512	.512	.515	+.515	+.515	.376	.375	.381	.381
45.....	-.380	-.373	-.369	-.900	-.900	-.896	-.899	-.899	-.317	.334	-.326	-.326
46.....	-.246	-.236	-.239	-.367	-.367	-.362	-.364	-.364	.737	.736	.731	.731
56.....	-.0245	-.236	-.239	-.361	-.361	-.361	-.364	-.364	-.253	-.265	-.269	-.269
57.....									-1	-1	-1	-1
67.....									1	1	1	1

14. Conclusiones

En el curso de nuestro trabajo hemos resuelto un mismo enrejado mediante tres métodos diferentes. Hemos encontrado los resultados proporcionados por cada uno de ellos y los hemos comparado en la tabla que se acompaña.

Nos encontramos, pues, en condiciones de pesar sus ventajas e inconvenientes relativos, así como su margen de aplicación práctica.

Confrontaremos estos métodos desde los siguientes puntos de vista: Exactitud, posibilidad de error, rapidez y margen de aplicación.

1) Exactitud:

Desde luego, por definición, el método «exacto» es el de las fuerzas. Sin embargo, como consecuencia de la herramienta que utilizamos para efectuar las operaciones (en el caso del ingeniero será frecuentemente una regla de cálculos) la exactitud del resultado está limitada por los errores acumulados en las operaciones parciales. Estos errores pueden tener una importancia considerable en el valor de los esfuerzos de barras muy poco solicitadas, que resultan en general de la diferencia entre números grandes parecidos entre sí.

La exactitud del método de Southwell depende de la longitud del proceso y de la herramienta utilizada en las operaciones de cálculo. Usando regla y reduciendo los esfuerzos residuales hasta aproximadamente un 1% de los iniciales, hemos obtenido errores máximos de 4.5%, siendo los errores más corrientes inferiores al 3.5%. No hemos considerado en la evaluación de estos errores los esfuerzos en barras prácticamente no solicitadas por suponer que las diferencias existentes entre los resultados se deben fundamentalmente al uso de regla de cálculo. La exactitud del método eléctrico depende del diseño más o menos costoso de los transformadores y reóstatos, del cuidado que se ponga durante el trabajo en la calibración de los reóstatos y la medida de las corrientes, y de los errores provenientes de los instrumentos de medida y la lectura de sus escalas. De acuerdo con los valores medidos en nuestro caso, los errores obtenidos mediante este método son prácticamente todos inferiores al 2.5%. Nuevamente no consideramos los esfuerzos en las barras muy poco solicitadas pues, ni los instrumentos de medida de corrientes, ni la regla de cálculo usada en el método de las fuerzas, pueden dar alguna certeza sobre sus verdaderos valores.

En todo caso se puede observar que los errores de cualquiera de los métodos anteriores, son enteramente compatibles con las exigencias de la práctica.

2) Posibilidades de error

El método de Southwell tiene la indiscutible ventaja sobre el método de las fuerzas y el método eléctrico, de que los errores habidos en el proceso de cálculo son detectados en una etapa cualquiera y se pueden compensar sin una revisión total del trabajo anterior. En cambio, en el método de las fuerzas, un error de signo o de operación que haya pasado desapercibido, puede conducir a resultados enteramente falsos.

En el método eléctrico es fácil reducir a un mínimo las posibilidades de error tomando las siguientes precauciones:

1) Tener claramente marcadas las polaridades de los transformadores de modo de no equivocarse al conectarlos; y

2) Controlar el valor de las resistencias incluídas antes y después de efectuar las medidas.

Si después de haber hecho las medidas se encuentra que ha habido algún cambio es necesario repetir las lecturas.

3) Rapidez y margen de aplicación.

Sin duda, en general, será el método eléctrico el más rápido. Los cuatro casos resueltos en esta memoria ocuparon aproximadamente las siguientes horas de trabajo:

Método eléctrico: 4 horas.

Método de las fuerzas: 15 horas.

Método de Southwell: 18 horas.

La rapidez de cada método varía extraordinariamente a medida que el enrejado se simplifica o complica.

Para el método eléctrico se puede decir que el tiempo es proporcional al número de barras. Para el de Southwell es más o menos proporcional al número de nudos. Para el método de las fuerzas, el largo del proceso crece rápidamente y se hace prácticamente inaceptable cuando el grado de hiperestaticidad es superior a 4; en cambio es probablemente el más breve cuando la indeterminación es de 1 o 2.

En enrejados espaciales, cuyas diagonales tengan inclinaciones muy variadas, el método eléctrico requiere un número creciente de transformadores de razón variable y en consecuencia se hace más caro. Por otra parte el método de las fuerzas se complica notablemente debido a la dificultad de resolver estructuras isostáticas en el espacio. En cambio, como se remarcó en el capítulo correspondiente, el método de Southwell se puede extender en forma muy simple a los problemas de tres dimensiones, sin originar cálculos más complicados que los que corresponden al enrejado plano.

Del estudio anterior puede concluirse:

a) Que el método eléctrico es notablemente más rápido y no tiene otra limitación que su costo y puede aplicarse a cualquier caso.

b) Que el método de Southwell es preferible al método de las fuerzas en todos los casos, salvo en estructuras de menos de 3 grados de indeterminación.

15. Notas finales

La búsqueda de un lenguaje común para las diversas ramas de la Física: electricidad, mecánica, hidráulica, acústica, etc. corresponde simultáneamente a los intereses de la técnica y a la sed de síntesis del pensamiento.

Ha sido poderoso aliciente para nosotros el ingenioso y brillante trabajo del egresado de nuestra Escuela, señor Urioste, sobre la analogía eléctrica del marco rígido. Existen además, numerosos trabajos teóricos que sientan las bases para una evolución profunda de estas investigaciones. Han derivado fundamentalmente del análisis teórico de los problemas generales de «circuitos» estudiados por Mr. Oliver Heaveside en el desarrollo de su cálculo operacional. Los libros de Mr. Vannevar Bush y Harry Olson que hemos podido consultar desarrollan la teoría general de los circuitos y estudian el problema de las «análogas dinámicas». Consideramos útil mencionarlas con el objeto de mostrar horizontales a los compañeros que seguramente continuarán estos trabajos.

Se define como «circuito» a una entidad física en la cual las magnitudes variables pueden determinarse suficientemente en función del tiempo y de una sola dimensión. «Campo» es una entidad física en que las magnitudes se determinan en función del tiempo y de 2 o 3 dimensiones. Una «red» es una combinación de circuitos similares. Con esta definición de circuito es posible estudiar en conjunto los circuitos me-

cánicos, calóricos, eléctricos, etc. En efecto, se puede comprobar que los parámetros que definen las características de todos estos circuitos tienen una función y dependencia similar. Consideremos cada uno de ellos:

a) **Resistencia.** Es el parámetro que indica disipación de energía. En el circuito eléctrico está definida por la Ley de Ohm: $E = Ri$.

En el circuito calórico es la resistencia al paso de flujo calórico $E = Ri$ ($E =$ diferencia de temperatura). En sistemas hidráulicos representa la caída de presión provocada por un flujo de velocidad unitaria. En sistemas mecánicos es el roce, fuerza que hay que vencer para dar velocidad unitaria a un cuerpo.

b) **Inertancia.** En electricidad este parámetro es la inductancia. Así como la resistencia se opone a la corriente, la inductancia se opone al cambio de corriente

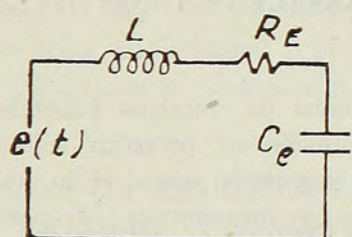
$E = L \frac{di}{dt}$. En mecánica el parámetro de inercia es la masa, fuerza necesaria para variar la velocidad en la unidad.

c) **Capacitancia.** El parámetro elástico de un circuito eléctrico es la capacitancia. Así como la inductancia se opone al cambio de corriente, la capacidad se opone al de voltaje $i = C \frac{dE}{dt}$. También $C = \frac{q}{E}$ ($q =$ cantidad de electricidad). La capacitancia térmica es el calor necesario para variar la temperatura en 1 grado.

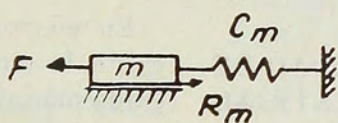
En mecánica, es el desplazamiento necesario para producir un esfuerzo unitario:

$$C_M = \frac{\Delta}{F}$$

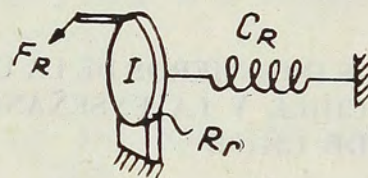
Como ilustración copiamos una figura del libro de Mr. H. Olson que muestra un circuito eléctrico y dos circuitos mecánicos (uno rectilíneo y otro rotatorio) análogos.



a)



b)



c)

La corriente equivale a la velocidad; la carga eléctrica al desplazamiento; el voltaje a la fuerza.

A nadie pueden escapar, a través de los ejemplos anteriores, las dimensiones de este nuevo camino del análisis, del cual nuestro trabajo apenas es un primer paso.

E. F.